INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES

POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

Concours Général de Physique Minko Balkanski

7 mai 2000

La clarté et la précision de la rédaction, qui doit être obligatoirement en **français**, *seront prises en compte dans la note finale.*

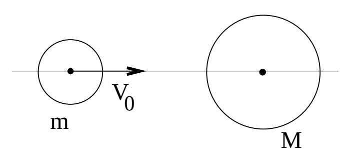
Les deux problèmes sont indépandents entre eux et peuvent être abordés dans n'importe quel ordre.

La durée de la composition est de **4 heures**.

Problème 1 "Propulsion électrostatique"(20 pts)

1.1.(Excercice préliminaire) On se propse d'étudier le choc central, parfaitement élastique entre deux corps de masses m et M(fig. 1.1). Le corps M est initialement immobile ; le corps m possède initialement une vitesse v_0 . On notera par v_1 et v_2 les vitesses de m et M respectivement après le choc. Les centres de gravité des deux corps ne quittent pas l'axe indiqué sur la figure.

Figure 1.1



1.1.a. (0.5pts) Écrire la conservation de la quantité du mouvement.

1.1.b. (0.5pts) Écrire la conservation de l'énergie cinétique (pourquoi a-t-on le droit de le faire?)

1.1.c. (1 pts) Calculer v_1 et v_2 en fonction de v_0 et m et M . (Astuce: utiliser $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$).

1.1.d. (0.5pts) Que deviennent ces expressions si $M >> m$? Vous venez de montrer que dans la limite $M >> m$ le corps léger est réfléchi par le corps lourd avec la même vitesse (résultat utile pour la suite).

1.2.On considère une bille métalique, de rayon R, porteuse d'une charge électrique Q et solidement accrochée au sol. Une autre bille, identique à la précédente mais non chargée et de masse M se trouve à une hauteur H_0 comptée à partir du point A comme à la fig.1.2 . On note par g l'accélération de la pesanteur.

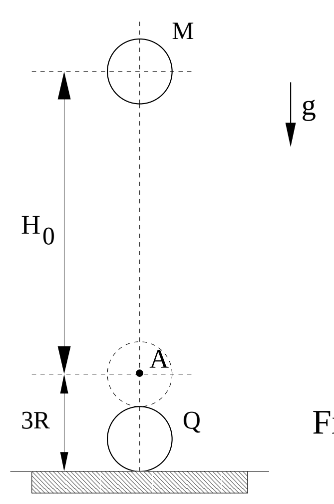


Figure 1.2

1.2.a. (0.5 pts) On lache la bille non chargée qui effectue une chute libre. Donner sa vitesse au point A.

1.2.b. (0.5pts) On va considérer les chocs entre les billes comme étant parfaitement élastiques. Quelle est la vitesse de la bille M juste après le choc? Justifier.

1.2.c. (1 pts) Comme les billes sont toutes les deux conductrices, pendant le choc il y a répartition quasi-instantanée de la charge électrique: chacune des deux se voit porteuse d'une charge $\frac{Q}{2}$. Donner l'énergie U électrostatique du système en fonction de Q,R et la permittivité du vide ϵ_0, sachant que chaque bille est alors équivalente à une charge ponctuelle $\frac{Q}{2}$ placée en son centre (fig.1.3).

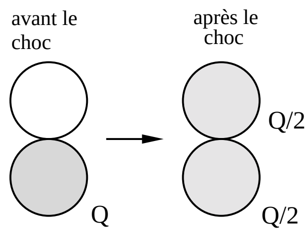


Figure 1.3

(On remarque que les rayons des billes sont supposés assez petits pour qu'on puisse négliger le phénomene d'induction électrostatique.)

1.2.d. (question indépendante; 1 pts) Calculer également l'énergie électrostatique totale du du système avant et après la répartition. Intérpreter.

1.2.e. (1.5 pts) Les forces agissant sur les billes sont-elles répulsives ou attractives? On notera H_1 la hauteur maximale atteinte par la bille M. Ecrire la loi de conservation de l'énergie mécanique pour le système des deux billes . On peut considérer que pour H_1 suffisament grand l'énergie électrostatique est négligeable devant l'énergie potentielle de pesanteur (Pouvez-vous justifier?) Donner H_1 en fonction de M, g, Q, R, H_0 et ϵ_0 .

1.2.f. (0.5 pts) Quand la bille M atteint la hauteur maximale, on la met en contact avec une électrode reliée à la terre (fig.1.4) de façon qu'elle se décharge. Calculer alors la vitesse avec laquelle elle retombe sur la bille immobile.

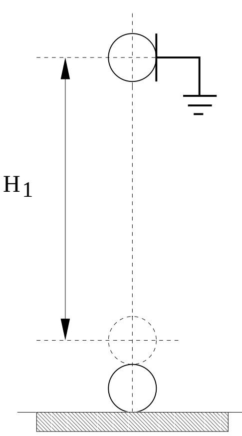


Figure 1.4

1.2.g. (1 pts) Quelle est la nouvelle charge des deux billes? On répète la procédure entière n fois. Quelle est la charge Q_n des deux billes juste apres le n-ième rebond? Vers quelle limite tend elle si $n \to \infty$?

1.2.h. (2 pts) Montrer la relation de récurrence suivante:

$$H_n = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 MgR}(\frac{1}{4})^n + H_{n-1},$$

entre les hauteurs maximales H_n et H_{n-1} après les n-ième et $n-1$-ième rebonds respectivement.

1.2.j. (3 pts) Calculer explicitement H_n en fonction de Q, g, M, R, ϵ_0 , H_0 et n. Quelle est la hauteur maximale H_{max} atteinte lorsque les deux billes sont complètement déchargées?

1.2.k. (1 pts) On donne $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 SI$, $g = 9,8ms^{-1}$, $M = 0,5kg$, $R = 1cm$, $H_0 = 10m$. Calculer Q pour avoir $H_{max} = 20m$.

1.3.On s'intéresse dans cette partie à la possibilité de satellisation de la bille. Un corps devient satellite de la Terre s'il est éjecté de sa surface avec la première vitesse cosmique qui vaut $v_I \approx 8kms^{-1}$.

1.3.a. (2 pts) Réécrire la relation de récurrence de façon qu'elle contienne non pas les hauteurs, mais les carrés des vitesses v_n après le n-ième rebond.

1.3.b. (2.5 pts) Trouver explicitement la vitesse v_n en fonction de Q, g, M, R, ϵ_0, v_0^2 et n , puis sa limite v_{max} quand $n \to \infty$. Ces résultats sont valables même pour des champs gravitationnels non homogènes comme celui de la Terre à grandes distances. Pouvez-vous expliquer pourquoi?

1.3.c. (1 pts) On négligera v_0 devant v_{max} pour la suite. Trouvez alors numériquement Q pour que $v_{max} = 8kms^{-1}$.

1.3.d. Quels inconvénients importants comporte, selon vous, cette méthode de satellisation des corps autour de la Terre?(+0.5 pts de bonus pour chaque raison citée et physiquement acceptable).

Problème 2 (15 pts)

On considère un wagon de longueur L divisé en deux compartiments par un piston de masse m, mobile sans frottements et isolant thermique parfait (fig.2.1). Chaque compartiment est rempli d'un mole du même gaz parfait. Dans le compartiment de droite se trouve un radiateur de masse négligeable. Les parois du wagon sont aussi des isolants thermiques parfaits. La masse du wagon (sans le piston) est notée M. On négligera dans toute la suite la masse du gaz.

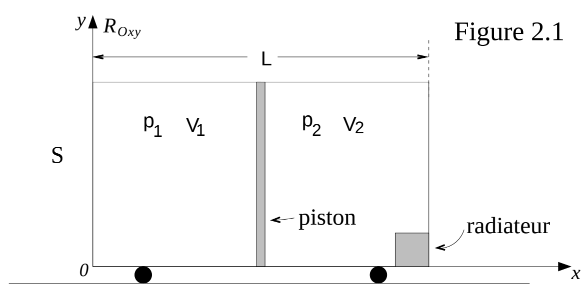


Figure 2.1

Le wagon peut se déplacer sur des rails horizontaux sans frottements.

Dans tout l'exercice on considèrera un repère R_{Oxy} attaché au wagon, comme indiqué sur la figure. On rappelle la formule :

$$x_G = \frac{m x_{G1} + M x_{G2}}{m + M},$$

qui donne l'abscisse x_G du centre de gravité d'un système composé des deux masses m et M en fonction des abscisses x_{G1} et x_{G2} de leurs centres de gravité.

2.1.Initialement les gaz dans les deux compartiments se trouvent à la même température T_0.

2.1.a. (0.5 pts) Rappeler l'équation d'état pour n moles de gaz parfait. L'écrire pour chaque compartiment. On notera p_1, p_2 les pressions et V_1, V_2 les volumes correspondants.

2.1.b. (1 pts) Exprimer la force agissant sur le piston en fonction de p_1, p_2 et S -la section du piston (S est également la section du chaque compartiment). Quelle est alors la condition sur p_1 et p_2 pour avoir l'équilibre mécanique du piston? Montrer alors qu'à l'équilibre $V_1 = V_2 = V_0$. Quelle est alors la position du piston?

2.2.On branche le radiateur jusqu'à ce que la température du deuxième compartiment augmente de T_0 à T de façon quasistatique. On notera $V_1^{'}, V_2^{'}, p_1^{'}, p_2^{'}$ les nouvelles valeurs des volumes et des pressions.

2.2.a. (0.5 pts) Le gaz dans le premier compartiment subit une transformation adiabatique, on rappelle que dans ce cas la pression et le volume sont reliés par:

$$pV^{\gamma} = const,$$

où γ est une constante caractéristique pour le gaz étudié. Donner une relation entre $p_1^{'}, V_1^{'}$ et p_1, V_0.

2.2.b. (0.5 pts) Donner la relation entre $p_2^{'}, V_2^{'}, p_2, V_0, T$ et T_0.

2.2.c. (1.5 pts) Soit Δx le déplacement du piston (fig.2.2). Donner $V_1^{'}$ et $V_2^{'}$ en fonction de $\Delta x, S, V_0$.

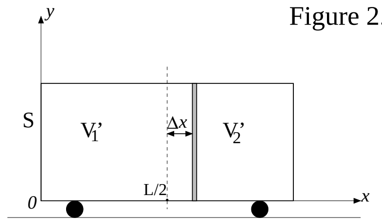


Figure 2.2

Pour la suite on considèrera que $S|\Delta x| << V_0$ (soit $|\Delta|x << L/2$). Exprimer alors $p_1^{'}$ en fonction de p_1 et le rapport $\frac{S\Delta x}{V_0}$. On rappelle la formule aprochée :

$$(1+\epsilon)^{\alpha} \approx 1 + \alpha\epsilon,$$

valable $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et pour $\epsilon << 1$.

2.2.d. (2.5 pts) Donner également l'expression approchée de $p_2^{'}$ en fonction de p_2 et $\frac{S\Delta x}{V_0}$. Avec la condition d'équilibre du piston montrer que Δx s'exprime:

$$\Delta x = \frac{L}{2} \frac{T_0 - T}{T_0 \gamma + T}.$$

2.2.e. (1.5 pts) Le signe de Δx semble-t-il conforme à votre intuition?

2.2.f. (1.5 pts) On donne $T = 30^o C$, $T_0 = 20^o C$, $L = 5m$ et $\gamma = 1,4$. Calculer Δx. L'hypothèse $\Delta x << L/2$ est-elle vérifiée? Proposer des ordres de grandeur pour le rapport $\frac{T}{T_0}$ pour que cette condition ne soit plus valable. Ces ordres de grandeur sont-ils réalistes pour les radiateurs dans la vie quotidienne?

2.2.g. (2.5 pts)On note par G le centre de gravité du système [piston+wagon]. Quel est le déplacement algébrique $\Delta x_{G|R}$ de G dans le repère R_{Oxy}?

Donner alors le déplacement algébrique $\Delta x_{G|sol}$ du wagon par rapport au sol en vous justifiant le plus complètement possible. On donne $M = 1ton$ et $m = 200kg$. Donner la valeur numérique de $\Delta x_{G|sol}$.

2.3. (3 pts.) On change maintenant radicalement les conditions physiques du problème: l'air est considéré comme restant à température constante T_0 et la paroi gauche du premier compartiment comme un conducteur parfait de chaleur (fig.2.3). Expliquer comment varie la température de ce compartiment lors du chauffage. Montrer qu'on peut se ramener au cas précédent en attribuant une valeur spéciale à la constante γ . Toujours dans l'hypothèse Δx petit, donner la nouvelle valeur pour le déplacement $\Delta x^{'}_{G|sol}$ du wagon par rapport au sol.

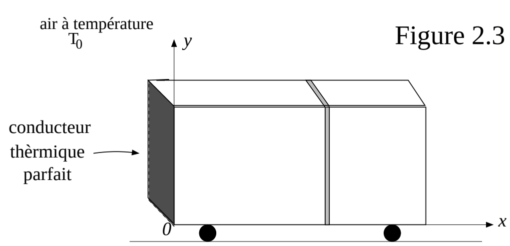


Figure 2.3

FIN